On considère la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par

$g(x)=\frac{2x}{1+x}-\ln(1+x)$

1/Etudier les variations de g et démontrer qu'il existe un réel unique α

Tel que $3<\alpha<4$ et $g(\alpha)=0$.

2/Tracer la courbe (C) représentative de g dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

3/Soit $x_0 \in]3;\alpha[$ et M_0 le point de (C) d'abscisse x_0.

a)Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) en M_0.

b) On désigne par x_1 l'abscisse du point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses. Donner x_1 en fonction de x_0, $g(x_0)$ et de $g'(x_0)$.

4/On considère la fonction h définie sur $[3;\alpha]$ par $h(x)=x-\frac{g(x)}{g'(x)}$ Ou g' désigne la fonction dérivée de g.

a) Montrer que : $\forall x \in [3;\alpha]$ $h'(x)=\frac{g''(x)g(x)}{[g'(x)]^2}$.
b) Calculer $g''(x)$ et en étudier le signe sur $I=]3;\alpha[$. En déduire que h est strictement croissante sur I et que $h(x_0)<\alpha$.
c) Montrer que sur $[3;\alpha]$ on a $0 \le h'(x) \le \frac{1}{4}$.

5/Etudier le signe de $h(x)-x$ sur $[3;\alpha]$ .En déduire que $3<x_0<x_1<\alpha$.

6/ On définit la suite (X_n) par son premier terme $X_0 \in]3;\alpha[$ et la relation $X_{n+1}=h(X_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que $3<X_n<\alpha, \forall n \in \mathbb{N}$.
b) Démontrer que la suite (X_n) est strictement croissante.
c) Appliquer le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction h sur l'intervalle $[3;\alpha]$ pour montrer que $\forall n \in\in \mathbb{N}$, $|\alpha-X_{n+1}| \le \frac{1}{4}|\alpha-X_n|$.
d) Utiliser ce résultat pour montrer que la suite (X_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

7/ Comment faut-il choisir n_0 pour que X_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près ?.